数理解析研究所講究録
388巻 1980年 144-169

Painlevé 方程式の双線形化による解析

早大 理工 大石進一

1. はじめに

最近、完全積分可能な非線形方程式に関する理論が著しい進歩を見せた。この15年間におけるソリトン理論の進歩は、その代表的な例である。ソリトン理論の進歩の結果、ソリトン系を記述する完全積分可能な非線形発展方程式が数多く発見されるとともに、これらの方程式を解析するための手法としてスペクトル保存変形理論[1]や広田の方法[2-5]などが、発見され発展させられてきている。一方、統計力学などに現われる特殊な数理物理的な問題の解析から出発した佐藤、三輪、神保氏によるモノドロミー保存変形理論も最近大きな展開を見せている[6]。その結果、完全積分可能な非線形方程式を解析するためのモノドロミー保存変形理論に基づく新しい視点が明らかにされた。この理論では、アーベル関数論における θ 関数の拡張と考えられる τ 関数が重要な役割を演じ、この理論の枠内で取り扱い得る非線形方程式の解は有理形と

なり、整関数であるτ関数の比として表わし得ることが示されている[6]。更に、τ関数のθ関数の拡張としての性質から、これらの非線形方程式は動く危点をもたない、すなわち、Painlevé的性質をもつものと予想されている[6]。

このような佐藤，三輪、神保理論の視点から見れば、ソリトン方程式のNソリトン解やN－gap解はτ関数がθ関数となる最っとも素直な場合として特徴づけられる。また、特に、広田の方法は非線形方程式のτ関数の従う方程式が双線形方程式[2-5]となる場合に、その双線形方程式を利用してτ関数を構成する方法と考えられる。広田の方法のこのような見方を数学的に徹底するには、なおいろいろな問題があると思われるが、ここでは、広田の方法を用いてPainlevéのII～IV形方程式（の特別な場合）が解析できることを示して、このような方向への1つの足がかりとしたい。

2. Painlevé方程式の双線形化

良く知られているように、Painlevé方程式には、次のIからVI形までがある：

（I形）　$w'' = 6w^2 + z$

（II形）　$w'' = 2w^3 + zw + \alpha$

（III形）　$w'' = w^{-1}(w')^2 - z^{-1}w' + z^{-1}(\alpha w^2+\beta) + \gamma w^3 + \delta w^{-1}$

(Ⅳ形) $w'' = (2w)^{-1}(w')^2 + (3w^3)/2 + 4zw^2 + 2(z^2-\alpha)w + \beta w^{-1}$

(Ⅴ形) $$w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)(w')^2 - \frac{1}{z}w' + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \frac{\gamma}{z}w + \delta\frac{w(w+1)}{w-1}$$

(Ⅵ形) $$w'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\right)(w')^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z}\right)w' + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{z}{w^2} + \gamma\frac{z-1}{(w-1)^2} + \delta\frac{z(z-1)}{(w-z)^2}\right)$$

但し、$w = w(z)$、$w' = dw/dz$ で、α、β、γ 及び δ は複素定数とする。以下、簡単のため、Painlevéの J 形の方程式を P_J $(J = \mathrm{I} \sim \mathrm{VI})$ と略記することにする。

広田の方法でこれらの方程式を扱うためには、解が整関数の比に書けるとして方程式に従属変数変換を施し、Painlevé方程式を新しい従属変数に対する双線形方程式に変換する必要がある。P_I から P_III の方程式に対しては、このことは実質的にPainlevé自身が行っており[7]、結果を広田の双線形作用素[2]を用いて現代流に書けば次のようになる：先ず、P_I は、変換

$$w(z) = -[\log \tau(z)]'' \qquad (2.1)$$

によって双線形方程式

$$(D_z^4 + z)\tau \cdot \tau = 0 \qquad (2.2)$$

に変換される。但し、D_z^n は広田の双線形作用素[2)]で、

$$D_z^n\ \tau_1(z)\cdot\tau_2(z) \triangleq \left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}-\frac{\partial^n}{\partial z'^n}\right)\tau_1(z)\tau_2(z')\Big|_{z'=z} \qquad (2.3)$$

で定義される。また、P_{II}は、変換

$$w = \{\log[(\tau_1+i\tau_2)/(\tau_1-i\tau_2)]\}' \qquad (2.4)$$

によって、双線形方程式

$$\begin{cases}(D_z^3 - zD_z)\,\tau_2\cdot\tau_1 = 2^{-1}i\alpha\,(\tau_1^2+\tau_2^2) & (2.5.1)\\ D_z^2\,(\tau_1\cdot\tau_1+\tau_2\cdot\tau_2)=0 & (2.5.2)\end{cases}$$

に変換される。但し、$i=\sqrt{-1}$。P_{III}は、変換

$$w = \tau_1/\tau_2 \qquad (2.6)$$

によって、双線形方程式

$$\begin{cases}(zD_z^2+D_z^+)\,\tau_2\cdot\tau_2 + 2\alpha\tau_1\tau_2 + 2\gamma z\tau_1^2 = 0 & (2.7.1)\\ (zD_z^2+D_z^+)\,\tau_1\cdot\tau_1 - 2\beta\,\tau_2\tau_1 - 2\delta z\tau_2^2 = 0 & (2.7.2)\end{cases}$$

に変換される。但し、

$$D_z^+\ \tau_1\cdot\tau_2 \triangleq (\tau_1\tau_2)'$$

$$\equiv\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z'}\right)\tau_1(z)\tau_2(z')\Big|_{z'=z} \qquad (2.8)$$

とする。

また、P_{IV} についても同様に双線形化できるが、それは、以下で述べることにして、ここでは省略する。また、以下で、P_{III}の解を具体的に構成する際には、式(2.7)のDecoupling[8)]

とは別のDecouplingが選ばれる。

3. Painlevé II 形方程式の解の構成

この節では、P_{II}を例にとって、その双線形形式を利用して、解の1径数族が構成できることを示す。

簡単のため、$\alpha=0$の場合を考える。また、便宜上、先ずP_{II}において

$$w(z)=i\,v(z) \tag{3.1}$$

と置いて得られる方程式

$$v''=-2v^3+zv \tag{3.2}$$

のzが実数のときvも実数となる解を構成することを考える。但し、vは、境界条件

$$v(z)\to a\,A_i(z) \tag{3.3}$$

を満たすものとする。ここに、aは実定数、$A_i(z)$はAiry関数で

$$A_i(z)=\frac{1}{2\pi}\int_C \exp\left[i\left(kz+\frac{k^3}{3}\right)\right]dk \tag{3.4}$$

と定義されるものとする。Cは複素k－平面の上半平面内の積分路で$k=-\infty$から出て$k=\infty$に入るものとする。式(3.3)の境界条件の下で、式(3.2)は変換

$$v=-i\{\log[(\tau_1+i\tau_2)/(\tau_1-i\tau_2)]\}' \tag{3.5}$$

によって双線形方程式

$$\begin{cases} (-zD_z + D_z^3)\,\tau_2\cdot\tau_1 = 0 & (3.6.1) \\ D_z^2\,(\tau_1\cdot\tau_1 + \tau_2\cdot\tau_2) = 0 & (3.6.2) \end{cases}$$

と結ばれている。以下、作用素 D_z^n の双線形性を用いて、式(3.6)の解を構成することを考える。

3.1 双線形方程式の解の構成法

$$\begin{cases} \tau_1(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{2n}\,\tilde{F}_{2n}(z) & (3.7.1) \\ \tau_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n+1}\,\tilde{F}_{2n+1}(z) & (3.7.2) \end{cases}$$

と置く。式(3.7)を式(3.6)に代入すると、作用素 D_z^n の双線形性から、もし関数系 $\tilde{F}_m$ が次の方程式系

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=0}^{n} (-zD_z + D_z^3)\,\tilde{F}_{2(n-\alpha)+1}\cdot\tilde{F}_{2\alpha} = 0 & (3.8, 2n+1) \\ \sum_{\alpha=0}^{n} D_z^2\,(\tilde{F}_{2(n-\alpha)}\cdot\tilde{F}_{2\alpha} + \tilde{F}_{2(n-\alpha)+1}\cdot\tilde{F}_{2\alpha-1} = 0 & (3.8, 2n) \end{cases}$$

を満たしていれば、式(3.7)で定義される関数 τ_1 と τ_2 は、式(3.6)の解となることがわかる。但し、$\tilde{F}_0 = 1$, $\tilde{F}_{-1} = 0$ とする。ここで、式(3.8, m)は、関数系 $\{\tilde{F}_\alpha\}_{\alpha=0}^{m-1}$ が既知のときには、関数 $\tilde{F}_m$ に対する線形方程式になることに注意する。特に、式(3.7.1)は、関数 $\tilde{F}_1$ に対する斉次線形微分方程式

$$\tilde{F}_1''' - z\tilde{F}_1' = 0 \qquad (3.9)$$

となる。式(3.9)は、元のP_{II}の線形化方程式であり、その解として

$$\tilde{F}_1(z)=\frac{1}{4\pi i}\int_C \exp\left[i\left(kz+\frac{k^3}{3}\right)\right]\frac{dk}{k} \tag{3.10}$$

を取ることができる。従って、以上のことから、もし方程式系(3.8、m)を、$\tilde{F}_0=1$と式(3.10)で与えられる$\tilde{F}_1$から出発して順次mの小さい方から解いて行って関数系$\tilde{F}_m$を決定できれば、式(3.6)の解を線形技法のみで構成できることがわかる。

3.2. 解の1径数族

本節では、以下、このような手続きによって、関数$\tilde{F}_m$を次のように決定できることを示す:

$$\tilde{F}_m(z)=\tilde{f}_m(z,t=1/3)。 \tag{3.11}$$

但し、

$$\tilde{f}_m(z,t)=\frac{1}{(4\pi i)^m m!}\int_C\cdots\int_C\left[\prod_{1\leq\alpha<\beta\leq m}\frac{(k_\alpha-k_\beta)^2}{(k_\alpha+k_\beta)^2}\right]$$

$$\times\exp\left[i\sum_{\alpha=1}^{m}(k_\alpha z+k_\alpha^3 t)\right]\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{dk_\alpha}{k_\alpha} \tag{3.12}$$

(証明) 関数系$\{\tilde{f}_m\}_{m=0}^{\infty}$から定義される関数

$$\begin{cases} f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{2n} \tilde{f}_{2n} & (3.13.1) \\ g = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n+1} \tilde{f}_{2n+1} & (3.13.2) \end{cases}$$

が、変形KdV 方程式

$$u_t + 6u^2 u_z + u_{zzz} = 0 \qquad (3.14)$$

の双線形形式

$$\begin{cases} (D_t + D_z^3)\, g \cdot f = 0 & (3.15.1) \\ D_z^2 (f \cdot f + g \cdot g) = 0 & (3.15.2) \end{cases}$$

の解となることに注意する[9]。但し、

$$u = -i \{ \log [(f + ig)/(f - ig)] \}_z \qquad (3.16)$$

で、独立変数による添字は、偏微分を表わすものとする。このことを認めれば、式(3.7)が、式(3.6)の解となることを示すためには、次の関係式

$$-z \tilde{F}'_m (z) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}_m (z, t) \right]_{t=\frac{1}{3}} \qquad (3.17)$$

が示されれば十分なことがわかる。実際、式(3.17)が示されれば、

$$\begin{cases} (-z D_z + D_z^3)\, \tau_2 \cdot \tau_1 = (D_t + D_z^3)\, g \cdot f \Big|_{t=\frac{1}{3}} = 0 & (3.18.1) \\ D_z^2 (\tau_1 \cdot \tau_1 + \tau_2 \cdot \tau_2) = D_z^2 (f \cdot f + g \cdot g) \Big|_{t=\frac{1}{3}} = 0 & (3.18.2) \end{cases}$$

となって、関数 τ_1, τ_2 が式(3.6)の解となることがわかる。

一方、公式(3.17)は、積分路 C の取り方から部分積分により

証明できる。従って、式(3.7)によって定義されるτ_1とτ_2が式(3.6)の解となることが証明された。

3.3. 解のPainlevé的性質

次に、以上で構成されたP_{II}の解の1径数族

$$v = -i\{\log[(\tau_1 + i\tau_2)/(\tau_1 - i\tau_2)]\}' \tag{3.19}$$

が、Painlevé的性質、すなわち、動く危点をもたないことを示す。そのために、先ず、関数

$$T = \tau_1 + i\tau_2 \tag{3.20}$$

がGel'fand-Levitan-Marchenko (GLM)積分方程式のFredholm行列式の形に書き直せることを示す。

Gram行列式に対する公式

$$\det\Delta_n = \prod_{1\leq\alpha<\beta\leq n} \frac{(k_\alpha - k_\beta)^2}{(k_\alpha + k_\beta)^2}, \tag{3.21}$$

但し、Δ_nは$n\times n$行列で第α-β要素に$2k_\alpha/(k_\alpha + k_\beta)$をもつもの、に注意すれば、関数Fは

$$T = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{2^n n!} \int_C \cdots \int_C \det(\Delta_n) \exp\left[i\sum\left(k_\alpha z + \frac{k_\alpha^3}{3}\right)\right] \times \prod_{\alpha=1}^{n} k_\alpha^{-1} dk_\alpha \tag{3.22}$$

と書き直せることがわかる。式(3.22)は、更に、次のように書き直すことができる：

$$T = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(2i)^n n!} \int_z^{\infty} \cdots \int_z^{\infty} det(\Phi_n) \prod_{\alpha=1}^{n} ds_\alpha \ . \quad (3.23)$$

但し、Φ_n は $n \times n$ 行列で、$\alpha - \beta$ 要素に

$$\tilde{A}_i(s_\alpha + s_\beta) \triangleq A_i[(s_\alpha + s_\beta)/2] \quad (3.24)$$

をもつものとする。式(3.23)は、Fredholm行列式の形をしている。

次に、式(3.23)をFredholm行列式としてもつ積分方程式を導出する。そのために、Fredholm[10] に従い次の関数

$$X(z, y) = -\frac{a}{2i}\tilde{A}_i(z+y) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{(2i)^{n+1} n!} \int_z^{\infty} \cdots \int_z^{\infty} det(\Psi_n)$$

$$\times \prod_{\alpha=1}^{n} ds_\alpha \quad (3.25)$$

を導入する。但し、Ψ_n は $(n+1) \times (n+1)$ 行列で、

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} \tilde{A}_i(z+y) & \tilde{A}_i(z+s_1) & \tilde{A}_i(z+s_2) & \cdots & \tilde{A}_i(z+s_n) \\ \tilde{A}_i(s_1+y) & \tilde{A}_i(s_1+s_1) & \tilde{A}_i(s_1+s_2) & \cdots & \tilde{A}_i(s_1+s_n) \\ \tilde{A}_i(s_2+y) & \tilde{A}_i(s_2+s_1) & \tilde{A}_i(s_2+s_2) & \cdots & \tilde{A}_i(s_2+s_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_i(s_n+y) & \tilde{A}_i(s_n+s_1) & \tilde{A}_i(s_n+s_2) & \cdots & \tilde{A}_i(s_n+s_n) \end{pmatrix}$$

$$(3.26)$$

で定義されるものとする。関数 X はFredholm の第1小行列式に対応し、関数 $T'(z)$ の $z-y$ 空間への拡張になっている:

$$X(z, z) = T'(z) 。 \quad (3.27)$$

式(3.25)において、各行列式 $\det(\Phi_n)$ を第1列について展開して整理すると、関数 $T(z)$ と関数 $X(z,y)$ との間の関係式

$$X(z,y)=\frac{ia}{2}\tilde{A}_i(z+y)T(z)+\frac{ia}{2}\int_z^\infty X(z+s)\tilde{A}_i(s+y)ds \tag{3.28}$$

を得る。この関係式から、関数 $K(z,y)\equiv X(z,y)/T(z)$ が、次のGLM積分方程式

$$K(z,y)+\frac{a}{2i}\tilde{A}_i(z+y)+\frac{a}{2i}\int_z^\infty K(z,s)\tilde{A}_i(s+y)ds=0 \tag{3.29}$$

を満たすことがわかる。

関係式

$$v(z)=-i\{\log[(\tau_1+i\tau_2)/(\tau_1-i\tau_2)]\}' \tag{3.30}$$

ほび

$$K(z,z)=X(z,z)/T(z)=[\log T(z)]' \tag{3.31}$$

から

$$v(z)=2\,\mathrm{Im}\,K(z,z) \tag{3.32}$$

を得る。

ここで、Fredholm積分方程式論[10]を用いれば、式(3.29)の解は一意で，関数 $T(z)$ と $X(z,y)$ が a の関数として整関数とな

ることが示せることに注意する。また、$T(z)$ 及び $\Xi(z,z)$ は z が有限のときには解析的であることも示される。これらのことと、式(3.31), (3.32)から、$v(z)$ が Painlevé 的性質をもつことがわかる。

3.4、解の漸近展開

次に、以上で構成した解 $v(z)$ の漸近的振舞を調べる。そのために、GLM積分方程式(3.29)を用いて、関数 $v(z)$ の漸近展開を導びくことにする。

形式的に、式(3.29)を Neumann－Liouville 展開で解くと

$$K(z,y)=\frac{ia}{2}\tilde{A}_i(z+y)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(ia)^{n+1}(\hat{\tilde{A}}_i^{\,n}\tilde{A}_i)(z,y) \tag{3.33}$$

を得る。但し、$\hat{\tilde{A}}_i$ は積分作用素で、関数 $\psi(z,y)$ に対して

$$(\hat{\tilde{A}}_i\psi)(z,y)=2^{-1}\int_z^{\infty}\psi(z,s)\tilde{A}_i(s,y)\,ds \tag{3.34}$$

で定義されるものとする。式(3.32)と(3.33)から

$$v(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{2n+1}\xi_{2n+1}(z) \tag{3.35}$$

を得る。但し、

$$\xi_m(z)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_C\cdots\int_C\frac{\exp[i\sum_{\alpha=1}^{m}(k_\alpha z+k_\alpha^3/3)]}{\prod_{\alpha=1}^{m-1}(k_\alpha+k_{\alpha+1})}\prod_{\alpha=1}^{m}dk_\alpha \tag{3.36}$$

で、$\prod_{\alpha=1}^{0}=1$とする。

ここで、展開(3.36)は形式的なもので、漸近展開として理解すべきであることを注意する。但し、十分小さなa、または、十分大きなzに対しては、この展開は収束してTaylor展開と考えることができる。いずれにしても、以上のことから

$$v(z) \to a\,A_i(z) \tag{3.37}$$

が従う。

以上では、式(3.2)の解で、zが実数のときvも実数となる解を構成した。P_{II}の解で、zが実数のときwも実数となる解は、以上の解でaを純虚数に置きかえ、$w=iv$とすれば得られる。

4. 相似変換による解の構成

前章の議論によって、P_{II}の解をその双線形形式を用いて構成できることが明らかにされた。この方法は、原理的には、P_{III}~P_{V}に対しても適用できるが、計算がかなり複雑になるものと予想される。そこで、本章では、P_{II}からP_{V}がソリトン方程式を相似変換することによって得られることを利用することを考えよう。実際、相似変換によって変形KdV方程式はP_{II}

に[11,12]、Sine－Gordon方程式はP_{III}に[11,12]、非線形Schrödinger方程式はP_{IV}に[11]、Pohlmeyer－Lund－Regge（PLR）方程式はP_{V}に[13]変換されることが知られている。

4.1　P_{II}の解

まず、例としてP_{II}の場合を考える。変形KdV方程式（3.14）の双線形形式（3.15）において、相似変換に対応して

$$\begin{cases} f(x,t)=\tau_1(z) \\ g(x,t)=\tau_2(z) \end{cases} \tag{4.1}$$

と置いてみる。但し、$z=x(3t)^{-\frac{1}{3}}$。すると簡単な計算の結果、式（3.15）は方程式（3.2）、$v''=-2v^3+zv$、（以下、この方程式をP_{II}'と呼ぶ）の双線形形式（3.6）に変換されることがわかる。このとき、変換（3.16）、$u=-i\{\log[(f+ig)/(f-ig)]\}_x$、は、

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -i(3t)^{-\frac{1}{3}}\{\log[(\tau_1+i\tau_2)/(\tau_1-i\tau_2)]\}' \\ &= (3t)^{-\frac{1}{3}}v(z) \end{aligned} \tag{4.2}$$

となる。以上のことから、式（3.15）の解で条件（4.1）を満たす解が構成できれば、変換（3.5）を通してP_{II}'の解が構成できることがわかる。

以下、式（3.15）の解で条件（4.1）を満足するものを構成することを考える。我々は、式（3.15）の解として、式（3.13）の

形の解を知っている。但し、$\tilde{f}_m$ は式(3.12)において測度 dk_α/k_α を $h(k_\alpha)dk_\alpha$, $h(k_\alpha)$ は k_α の任意関数、で置きかえて得られる関数とする(この関数を以下やはり $\tilde{f}_m$ で表わす)。ここで、$\tilde{f}_m$ で、$\kappa_\alpha = k_\alpha(3t)^{\frac{1}{3}}$ と置くと

$$\tilde{f}_m(x,t) = \frac{1}{(4\pi i)^m m!}\int_C \cdots \int_C \left[\prod_{1\leq\alpha<\beta\leq m} - \frac{(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)^2}{(\kappa_\alpha + \kappa_\beta)^2} \right]$$

$$\times \exp\left[i\sum_{\alpha=1}^{m} \left(\kappa_\alpha z + \frac{\kappa_\alpha^3}{3} \right) \right] \prod_{\alpha=1}^{m} \frac{h(k_\alpha)\,d\kappa_\alpha}{(3t)^{\frac{1}{3}}} \qquad (4.3)$$

となることに注意する。従って、$h(k) = k^{-1}$ と置けば、$\tilde{f}_m(x,t) = \tilde{f}_m(z)$ となり、式(3.13)を通して P_{II}' の解が得られることがわかる。この結果は、前章で得られた結果と一致する。

ここで、変形KdV方程式の双線形形式は、式(3.15)だけに限られる訳ではないことを注意する。実際、

$$u = g_2/g_1 \qquad (4.4)$$

の変換によって変形KdV方程式(3.14)は、双線形方程式

$$\begin{cases} (D_t + D_x^3)\, g_2 \cdot g_1 = 0 \\ D_x^2\, g_1 \cdot g_1 = g_2^2 \end{cases} \qquad (4.5)$$

に変換される。式(4.5)において

$$\begin{cases} g_1(x,t) = Q_1(z) \\ g_2(x,t) = (3t)^{-\frac{1}{3}}\, Q_2(z) \end{cases} \qquad (4.6)$$

と置くと、式(4.5)は

$$\begin{cases} (zD_z + I - D_z^3)\, Q_2 \cdot Q_1 = 0 \\ D_z^2\, Q_1 \cdot Q_1 = Q_2^2 \end{cases} \tag{4.7}$$

となる。但し、$z = x(3t)^{-\frac{1}{3}}$。このとき；

$$v(z) = Q_2(z) / Q_1(z) \tag{4.8}$$

は P_{II}' を満たすことがわかる。従って、条件(4.6)を満たす式(4.5)の解を構成できれば、式(4.8)を通して P_{II}' の解が構成できることになる。

式(4.5)の解としては

$$\begin{cases} g_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{2n} p_{2n} & (4.9.1) \\ g_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n+1} p_{2n+1} & (4.9.2) \end{cases}$$

の形の解を構成することができる。但し、$m = 2n$ 又は $2n+1$ に対して、p_m は

$$p_m = \frac{1}{n!(m-n)!} \int_C \cdots \int_C \prod_{1 \leqq \alpha < \beta \leqq m} \varphi_n(\alpha, \beta)$$

$$\times \exp\left[i \sum_{\alpha=1}^{m} (k_\alpha x + k_\alpha^3/3) \right] \prod_{\alpha=1}^{m} h(k_\alpha)\, dk_\alpha \tag{4.10}$$

で与えられるものとする。ここに、$\varphi_n(\alpha, \beta)$ は

$$\varphi(\alpha, \beta) = \begin{cases} -(k_\alpha + k_\beta)^{-2} & \text{for } 1 \leqq \alpha \leqq n,\ n+1 \leqq \beta \leqq m \\ -(k_\alpha - k_\beta)^2 & \text{elsewhere} \end{cases} \tag{4.11}$$

で定義されるものとする。また、Cは、式(3.4)の定義のときと同じで、$h(k)$ は k の任意関数とする。式(4.10)において $x=(3t)^{\frac{1}{3}}k$ と置いてみれば、

$$h(k)=1 \tag{4.12}$$

のとき式(4.6)の条件が満足されることがわかる。従って、P_{II}' の解が構成できたことになる。

式(4.7)の第2式ほび式(4.8)から、関係式

$$v^2(z)=[\log Q_1(z)]'' \tag{4.13}$$

を得る。以下、関数$Q_1(z)$がτ一関数としての性質をもつことを示す。公式

$$\prod_{1\leqq\alpha<\beta\leqq 2n}\varphi_n(\alpha,\beta)=-\det B^2, \tag{4.14}$$

但し、Bは $n\times n$ 行列で $\alpha-\beta$ 要素として $1/i(k_\alpha+k_\beta)$ をもつものとする、に注意すれば、関数$Q_1(z)$は、

$$Q_1(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2n}}{(n!)^2}\int_C\cdots\int_C-\det(B^2)$$

$$\times\exp\left[i\sum_{\alpha=1}^{2n}(k_\alpha z+k_\alpha^3/3)\right]\prod_{\alpha=1}^{2n}dk_\alpha \tag{4.15}$$

と書き直すことができる。ここで、

$$F(z) = \int_C e^{i(kz + k^3/3)} k\,dk \tag{4.16}$$

なる核関数を導入すると、式(4.15)は、

$$Q_1(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(n!)^2} \int_z^{\infty} \cdots \int_z^{\infty} \det(\Phi_n^{\,2}) \prod_{\alpha=1}^{n} dx_\alpha dy_\alpha \tag{4.17}$$

と書き直すことができる。但し、Φ_n は $n \times n$ 行列で $\alpha-\beta$ 要素に $F(x_\alpha + y_\beta)$ をもつものとする。式(4.17)は更に、

$$Q_1(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a^2)^n}{n!} \int_z^{\infty} \cdots \int_z^{\infty} \det(\Psi_n) \prod_{\alpha=1}^{n} dx_\alpha \tag{4.18}$$

と書き直すことができる。但し、Ψ_n は $n \times n$ 行列で、$\alpha-\beta$ 要素に

$$\int_z^{\infty} F(x_\alpha, y) F(y, x_\beta)\, dy \tag{4.19}$$

をもつものとする。式(4.18)は、GLM積分方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1(z,y) + a^2 F(z+y) + a^2 \int_z^{\infty} K_2(z,x) F(x+y)\, dx = 0 \\ K_2(z,y) + a^2 \int_z^{\infty} K_1(z,x) F(x+y)\, dx = 0 \end{array} \right. \tag{4.20}$$

のFredholm行列式の形をしていることがわかる。従って、第3章3節の議論と同様にして、関数 $Q_1(z)$ が τ-関数としての性質をもつことがわかる。

以上、P_{II}'の2通りの解を構成したが、両者の解の間には

$$\begin{cases} Q_1(z) = \tau_1^2(z) + \tau_2^2(z) \\ Q_2(z) = 2D_z\ \tau_2(z)\cdot\tau_1(z) \end{cases} \tag{4.21}$$

の関係が成り立つことを注意する。

4.2. P_{III}の解

次に、P_{III}（の係数の特別な場合）の解の1径数族を、前節と同様の方針で構成する。そのために、sine-Gordon方程式

$$u_{xt} = \sin u \tag{4.22}$$

の双線形形式

$$\begin{cases} D_x D_t\, g\cdot f = gf \\ D_x D_t\,(f\cdot f - g\cdot g) = 0 \end{cases} \tag{4.23}$$

を考える。但し、

$$u = -2i\log[(f+ig)/(f-ig)]。 \tag{4.24}$$

式(4.23)において

$$\begin{cases} f(x,t) = \tau_1(z) \\ g(x,t) = \tau_2(z) \end{cases} \tag{4.25}$$

但し、$z = xt$、と置くと式(4.23)は

$$\begin{cases} (zD_z^2 + D_z^+)\ \tau_2\cdot\tau_1 = \tau_2\tau_1 \\ (zD_z^2 + D_z^+)\ (\tau_1\cdot\tau_1 - \tau_2\cdot\tau_2) = 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

と変換される。このとき、

$$v = -2i \log[(\tau_1 + i\tau_2)/(\tau_1 - i\tau_2)] \qquad (4.27)$$

は、方程式

$$v'' + z^{-1}v' = z^{-1}\sin v \qquad (4.28)$$

を満たしている。式(4.28)において

$$w = \exp(iv) \qquad (4.29)$$

と置くと、wはP_{III}の特別な場合

$$w'' = w^{-1}(w')^2 + z^{-1}w' + (2z)^{-1}(w^2 - 1) \qquad (4.30)$$

を満たすことが知られている[11]。従って、式(4.26)の解τ_1, τ_2から

$$w = (\tau_1 + i\tau_2)^2/(\tau_1 - i\tau_2)^2 \qquad (4.31)$$

によって定義される関数wは式(4.30)（以下、この方程式をP_{III}'と呼ぶ）の解となることがわかる。

式(4.26)の解を構成するために、式(4.23)のGーソリトン解として

$$\begin{cases} f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{2n} d_{2n} \\ g = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n+1} d_{2n+1} \end{cases} \qquad (4.32)$$

が取れることを注意する[14]。但し、

$$d_m = \frac{1}{m!}\int_C \cdots \int_C \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq m} \frac{(k_\alpha - k_\alpha)^2}{(k_\alpha + k_\alpha)^2} \exp\left[i\sum_{\alpha=1}^{m}(k_\alpha x + k_\alpha^{-1} t)\right] \times \prod_{\alpha=1}^{m} h(k_\alpha)\, dk_\alpha \qquad (4.33)$$

ここに、Cは図1のように定義される積分路で、$h(k)$はkの任意関数とする。式(4.33)において、$\kappa_\alpha = tk_\alpha$とおけば、前節の議論と同様にして、

$$h(k) = 1/k \qquad (4.34)$$

と置けば$d_m(x,t) = d_m(z)$となって、式(4.25)の条件が満たされることがわかり、P_{III}'の解を得る。このようにして得られた解$\tau_1 + i\tau_2$がτ関数としての性質をもつことは、第3章第3節の議論と同様にして示すことができる。

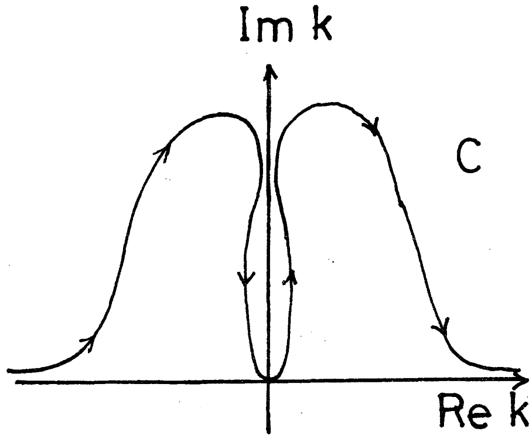

図1. P_{III}'に対する積分路C

ここで、P_{III}の特別な場合

$$\frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} = \frac{1}{w_1(x)}\left(\frac{dw_1(x)}{dx}\right)^2 - \frac{1}{x}\frac{dw_1(x)}{dx} + \frac{w_1^3(x)}{4} - \frac{1}{4w_1(x)} \qquad (4.35)$$

の解は、式(4.26)の解$\tau_1(z)$、$\tau_2(z)$から

$$w_1(x) = \frac{\tau_1(\frac{x^2}{4}) + i\tau_2(\frac{x^2}{4})}{\tau_1(\frac{x^2}{4}) - i\tau_2(\frac{x^2}{4})} \qquad (4.36)$$

と求められることを注意する。

4.3. P_{IV}の解

P_{IV}（の係数の特別な場合）の解の1径数族を構成する。そのために、非線形Schrödinger方程式

$$iu_t + 2|u|^2u + u_{xx} = 0 \qquad (4.37)$$

の双線形形式

$$\begin{cases} (iD_t + D_x^2)\, g\cdot f = 0 \\ D_x^2\, f\cdot f = 2gg^* \end{cases} \qquad (4.38)$$

を考える。但し、g^*はgの複素共役、fは実関数で

$$u(x,t) = g(x,t)/f(x,t) \qquad (4.39)$$

とする。式(4.38)において

$$\begin{cases} f(x,t) = \tau_1(y) \\ g(x,t) = t^{-\frac{1}{2}}\tau_2(y) \end{cases} \qquad (4.40)$$

と置くと、式(4.38)は

$$\begin{cases} [i(yD_y + I) - 2D_y^2]\, \tau_2\cdot\tau_1 = 0 \\ D_y^2\, \tau_1\cdot\tau_1 = 2\tau_2^*\tau_2 \end{cases} \qquad (4.41)$$

と変換されることがわかる。但し、$y = xt^{-\frac{1}{2}}$。このとき、

$$v(y) = \tau_2(y)/\tau_1(y) \qquad (4.42)$$

は方程式

$$-\frac{i}{2}\left(v(y) + y\frac{dv(y)}{dy}\right) + \frac{d^2v(y)}{dy^2} + 2|v(y)|^2 v(y) = 0 \qquad (4.43)$$

を満たしている。式(4.43)において

$$v(y) = \rho(y) \exp[i\theta(y)] \tag{4.44}$$

と置くと、式(4.43)は

$$\begin{cases} \rho_y - \rho\theta_y^2 + (y\rho\theta_y)/2 + 2\rho^3 = 0 \\ \rho\theta_{yy} + 2\rho_y\theta_y - \rho/2 - (y\rho_y)/2 = 0 \end{cases} \tag{4.45}$$

と変換される。式(4.45)は、更に、1つの方程式にまとめられることが知られていて[11]、結局、変数

$$\psi(y) = \theta_y(y) - y/4 \tag{4.46}$$

に対する次の方程式となる：

$$\psi_{yy} = (2\psi)^{-1}(\psi_y)^2 - 1/(32\psi) - 2\psi(3\psi^2 - y\psi + y^2/16)。 \tag{4.47}$$

式(4.47)は、変換

$$\begin{cases} w = 4i^{-\frac{1}{2}}\psi \\ z = -2^{-1}i^{-\frac{1}{2}}y \end{cases} \tag{4.48}$$

によって、P_{IV} において、$\alpha = 2$, $\beta = 0$ と置いた方程式に帰着する。以下、この方程式を P_{IV}' と呼ぶことにする。以上のことから、P_{IV}' の解は、式(4.41)の解 $\tau_1(y)$, $\tau_2(y)$ を用いて

$$w(z) = 4i\left[\log e^{z^2}\frac{\tau_2(-2\sqrt{i}z)}{\tau_2^*(2\sqrt{i}z^*)}\right]' \tag{4.49}$$

と求められることがわかる。

式(4.41)の解を求めるために、式(4.38)のG－ソリトン解として

$$\begin{cases} f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{2n} d_{2n}(x) \\ g = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n+1} d_{2n+1}(x) \end{cases} \tag{4.50}$$

が取れることを注意する。但し、$m=2n$ または $2n+1$ に対して d_m は

$$d_m(x) = \frac{1}{n!(m-n)!}\int_C \cdots \int_C \prod_{1\leqq\alpha<\beta\leqq m} \varphi(\alpha,\beta)$$

$$\times \exp\left[i\sum_{\alpha=1}^{n}(k_\alpha x - ik_\alpha^2 t) - i\sum_{\alpha=n+1}^{m}(k_\alpha^* x + ik_\alpha^{*2} t)\right] \prod_{\alpha=1}^{n} h(k_\alpha)dk_\alpha \prod_{\alpha=n+1}^{m} h^*(k_\alpha^*)dk_\alpha^* \tag{4.51}$$

と定義されるものとする。但し、

$$\varphi(\alpha,\beta) = \begin{cases} -(k_\alpha - k_\beta^*)^{-2} & \text{for } 1\leqq\alpha\leqq n,\ n+1\leqq\beta\leqq m \\ -(k_\alpha - k_\beta)^2 & \text{for } 1\leqq\alpha<\beta\leqq n \\ -(k_\alpha^* - k_\beta^*)^2 & \text{for } n+1\leqq\alpha<\beta\leqq m \end{cases}。 \tag{4.52}$$

また、$h(k)$ は k の任意関数で、積分路 C は P_{II}' に対するそれと同様に定義されるものとする。式(4.51)において、$\kappa_\alpha = t^{\frac{1}{2}} k_\alpha$ と置けば、$h(k)=1$ のとき、式(4.50)で定義される関数 f 及び g は、式(4.40)の条件を満たすことがわかる。こうして、P_{IV}' の解が構成された。

5. 注意

まず、4章の議論をPLR方程式の双線形形式[15]に適用することによって、P_V(の係数の特別な場合)の解の1径数族

を構成できることを注意する。また、本文では、Painlevé方程式の解の1径数族を構成したが、ソリトン方程式の有理関数解からPainlevé方程式の有理関数解を4章の方法に従って構成できる。これらのことについては、Painlevé方程式のBäcklund変換の取り扱いとともに、近い将来報告することにしたい。

文　献

1) 例えば、本文に直接関係あるものとして、H. Flaschka and A.C. Newell: "Monodromy and Spectrum Preserving Deformations I", to appear がある。

2) R. Hirota and J. Satsuma: Prog. Theor. Phys. Suppl. 59, (1976) 64。

3) S. Oishi: J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979) 1341。

4) S. Oishi: J. Phys. Soc. Jpn. 48 (1980) 639。

5) A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979)

6) 例えば、1977年以降 Proc. Japan. Akad. Ser. A に出版されている "Studies on Holonomic Quantum Fields" と題する一連の論文参照。また、M. Jimbo and T. Miwa: RIMS-315, 316。

7) P. Painlevé : Acta Math. 25 (1901) 1。

8) R. Hirota : 本講究録の論文等参照。

9) S. Oishi : Preprint. a (1980)。

10) I. Fredholm : Acta Math. 27 (1903) 365。

11) R. Nakach : " Sur les Equations D'Evolution Non-lineares de Signification Physique", Preprint (1976)

12) M. J. Ablowitz and H. Segur : Phys. Rev. Letters 38 (1977) 1103。

13) M. Jimbo : Prog. Theor. Phys. 61 (1979) 359

14) S. Oishi : Preprint b (1980).

15) B. S. Getmanov : Theo. Math. Fiz. 38 (1979) 186
この論文ではPLRのTrilinear formが求められているが、実は、この式をBilinear formに書き直せることが広田良吾氏によって示されている。